

SÉRIE : E  
N° D'ORDRE : 247

---

# THÈSE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND II  
(U. E. R. des Sciences Exactes et Naturelles à Dominante Recherche)

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Jean-Baptiste H I R I A R T – U R R U T Y

CONTRIBUTIONS A LA PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE :  
CAS DÉTERMINISTE ET STOCHASTIQUE.

SOUTENUE LE 20 SEPTEMBRE 1977 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

---

MM . L . SCHMETTERER

Président

A. AUSLENDER

P.L. HENNEQUIN

P.J. LAURENT

B . VAN CUTSEM

Examineurs



SÉRIE : E  
N° D'ORDRE : 247

---

# THÈSE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND II

(U.E.R. des Sciences Exactes et Naturelles à Dominante Recherche)

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Jean-Baptiste HIRIART – URRUTY

CONTRIBUTIONS A LA PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE :  
CAS DETERMINISTE ET STOCHASTIQUE.

SOUTENUE LE 20 SEPTEMBRE 1977 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. L. SCHMETTERER

Président

A. AUSLENDER

P.L. HENNEQUIN

P.J. LAURENT

B. VAN CUTSEM

Examineurs



## INTRODUCTION GENERALE

Cette thèse constitue un ensemble de contributions dans des domaines tels que :

*l'algorithme stochastique ( Ch. I, II, III )*

*l'analyse convexe et la programmation stochastiques ( Ch. IV, VI )*

*la programmation non différentiable et les applications dans le cas déterministe et stochastique ( Ch. V, VI, VII, VIII )*

Les travaux de recherche effectués et les résultats acquis sont présentés dans les introductions des différents chapitres. Nous indiquons dans cette introduction générale les grandes lignes directrices de ce travail , chapitre par chapitre.

*CHAPITRE I : Algorithmes stochastiques de résolution d'équations et d'inéquations variationnelles. (52 pages)*

Combinant les idées de l'approximation stochastique et les méthodologies développées dans le cadre déterministe, nous présentons dans ce chapitre des algorithmes de résolution d'équations et d'inéquations variationnelles lorsque les observations de l'opérateur sont bruitées. En définissant les algorithmes stochastiques, on construit une suite de variables aléatoires  $U_1, \dots, U_n$  et la détermination du nouvel itéré  $U_{n+1}$  à partir de  $U_n$  utilise essentiellement l'évaluation stochastique  $Y_{U_n}$  de  $A$  au niveau  $U_n$ . Nous nous sommes efforcés de donner des résultats de convergence de la suite d'estimateurs  $\{U_n\}$  vers la solution du problème posé, dans un sens probabiliste le plus fin possible : convergence en moyenne quadratique et convergence presque sûre. Différentes classes d'algorithmes sont étudiées dans un cadre hilbertien volontairement général et sous des hypothèses "stochastiques" sur les bruits plus faibles que celles habituellement envisagées dans le contexte de l'approximation et l'optimisation stochastique.

*CHAPITRE II : Algorithmes stochastiques de descente. (37 pages)*

Dans une première partie, nous décrivons un modèle général d'algorithmes stochastiques du type "descente" pour les problèmes d'optimisation en présence de bruits. En s'appuyant sur les théorèmes de convergence des martin-



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41548622\\_0005](https://archive.org/details/IA41548622_0005)

gales et les techniques utilisées en optimisation déterministe, on donne des résultats de convergence presque sûre pour des sous-suites d'itérés stochastiques ( sans unicité de la solution ni convexité de la fonction objectif dans le problème posé ). Ce travail est à relier à ce qui se fait dans le genre

en France : travaux de J.P. Bertran qui fûrent le point de départ de notre étude, travaux tournés vers les applications : C. Macchi, G. Perennou, P.Daubèze....

aux Etats-Unis : travaux de H.J. Kushner, T. Gavin... en liaison avec les problèmes issus de la théorie du contrôle stochastique

en Union Soviétique : travaux de B.T. Polyack à Moscou, études d'analogues stochastiques de procédures déterministes utilisées en optimisation convexe par Yu. Ermoliev et l'école de Kiev....

Dans une deuxième partie, on considère une classe d'algorithmes stochastiques où le caractère "stochastique" n'est pas inhérente au problème donné mais où seule la méthode est stochastique. Nous développons une idée de méthode probabiliste pour une famille de problèmes d'optimisation : il s'agit de méthodes stochastiques de décomposition.

*CHAPITRE III : Algorithmes de type pénalisation et de type dual pour la résolution de problèmes d'optimisation stochastique avec contraintes stochastiques. (51 pages)*

Dans ce chapitre, on développe une famille d'algorithmes stochastiques pour des problèmes donnant lieu à des modèles où les observations sur la fonction objectif et sur les fonctions définissant les contraintes sont bruitées. Cette étude, motivée par différents problèmes notamment dans la théorie des systèmes, nous est apparu techniquement difficile du fait de l'introduction des bruits sur les contraintes. La considération de lagrangiens augmentés nous a amenés à étudier différents algorithmes se rattachant à ces lagrangiens : des algorithmes stochastiques du type pénalisation extérieure et des algorithmes stochastiques de type dual.

*CHAPITRE IV : Propriétés de la fonctionnelle moyenne et de l'inf-convolution continue en analyse convexe stochastique. (74 pages)*

Dans de nombreux exemples issus de la théorie du contrôle, de l'économie, de la programmation stochastique se présentent des problèmes d'optimisation où le critère prend la forme d'une fonctionnelle moyenne  $Ef : x \longmapsto \int_{\Omega} f(x, \omega) dP(\omega)$ . Dans ce chapitre, on considère de façon détaillée les propriétés des fonctionnelles moyennes; notre étude se place du point de vue de l'analyse convexe : les propriétés de nature algébrique ou topologique



ainsi que les différentes caractéristiques rattachées à une fonction convexe sont considérées. Par polarité, la notion de fonctionnelle moyenne est liée à celle d'inf-convolution continue dont nous donnons aussi quelques propriétés. Parmi les applications, on se sert des résultats obtenus pour une série de problèmes d'optimisation où les critères et les contraintes sont définis par le biais de fonctionnelles moyennes ou d'inf-convolutions continues.

*CHAPITRE V : Conditions nécessaires d'optimalité en programmation non différentiable. (50 pages)*

Les problèmes non différentiables, aussi bien de nature déterministe que stochastique, nous ont amenés à étudier les conditions nécessaires d'optimalité en l'absence d'hypothèses de convexité et de différentiabilité. Au cours des dernières années, on a assisté à différentes tentatives de "deconvexification" : il s'agissait dans tous les cas de définir ( pour des fonctions non nécessairement convexes ni différentiables ) une nouvelle notion étendant la notion de gradient dans le cas différentiable et celle de sous-différentiel dans le cas convexe. Le concept que nous utilisons dans ce chapitre est celui de gradient généralisé au sens de F.H. Clarke. Pour les applications en vue, notamment celles du chapitre suivant, le cadre choisi est volontairement celui de la dimension finie et on aborde essentiellement des contraintes du type inégalité.

*CHAPITRE VI : Gradients généralisés de fonctions marginales. Applications aux conditions nécessaires d'optimalité pour un programme stochastique avec recours. (48 pages)*

La modélisation de processus de décision sous la forme dynamique conduit à étudier des programmes stochastiques avec recours en l'absence d'hypothèses de convexité et de différentiabilité sur les fonctions intervenant dans les programmes des deux étages. La forme particulière des coûts associés aux programmes du deuxième étage nous a amenés à faire une étude détaillée des gradients généralisés de fonctions dites "marginales", d'un point de vue déterministe. Des conditions de Kuhn-Tucker ( forme du gradient généralisé ) sont établies sous une forme semblable à celle décrite dans le cas convexe par R.T. Rockafellar et R.J.B. Wets.

*CHAPITRE VII : Sur les cônes tangents et leurs applications en programmation non différentiable. (53 pages)*

Cette étude concerne les différentes formes d'approximations d'une contrainte par des cônes tangents et leurs applications aux problèmes d'optimisation non différentiables posés dans des espaces de Banach. Une caractérisation séquentielle est donnée pour le cône tangent en adoptant comme



définition de ce cône celle introduite par F.H. Clarke en dimension finie. Des théorèmes de comparaison sont donnés entre ce cône tangent et les différents cônes de déplacements admissibles utilisés dans les approches classiques. On introduit à ce propos de nouveaux concepts et notions infinitésimales. De plus, des conditions nécessaires d'optimalité sont établies sous une forme globale et dans un contexte général.

*CHAPITRE VIII : Problèmes d'optimisation en présence de liaisons (34 pages)*

Dans ce chapitre est abordé le problème des liaisons en optimisation non différentiable. Le concept de sous-cône normal est introduit et comparé aux notions de "normalité" existantes. A côté de celles existant déjà, nous donnons de nouvelles règles d'estimation ou de calcul de gradients généralisés de fonctions composées, règles particulièrement importantes par les applications qu'elles comportent. Dans le cas de plusieurs liaisons, l'étude des conditions d'optimalité est faite par le biais de la matrice Jacobienne généralisée grâce à un théorème de fonctions implicites que l'on démontre.

Les résultats de ce travail ont été pour une bonne part annoncés dans des Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (Série A) et font l'objet de publications parues ou à paraître.

En raison du volume de la thèse, seule l'introduction générale est indiquée dans ce bref résumé.

Le lecteur intéressé pourra avoir accès à la rédaction détaillée de la thèse

. soit par prêt interuniversitaire auprès de la

Bibliothèque Universitaire

Section Sciences

Complexe Scientifique des Cézeaux

B.P. 45

63170 AUBIERE

. soit en commandant l'ouvrage au

Département de Mathématiques Appliquées

Complexe Scientifique des Cézeaux

B.P. 45

63170 AUBIERE



# PUBLICATIONS (Recherche)

*Algorithmes stochastiques de résolution d'équations  
et d'inéquations variationnelles*

Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 33, 167-168 (1975)

Chapitre corres-  
pondant de la  
Thèse

Ch. I  
(partiel)

*Optimisation stochastique : méthodes de descente*

Annales Scientifiques de l'Université de Clermont, Mathématiques  
12ème fascicule, n° 58, 110-131 (1976)

Ch. II  
(1° partie)

*Algorithmes stochastiques de type pénalisation et de type dual  
pour les problèmes à observations bruitées sur l'objectif et  
sur les contraintes*

Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t.282, Série A, 907-910 (1976)

Ch. III

*Algorithms of penalization type and of dual type for the  
solution of stochastic optimization problems with stochastic  
constraints*

Recent Developments in Statistics (J.R. Barra et al., editors  
North-Holland. Publishing Company (1977)

*Etude de quelques propriétés de la fonctionnelle moyenne et de  
l'inf-convolution continue en analyse convexe stochastique*

Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t. 280, série A, 129-132 (1975)

Ch. IV  
(1° partie)

*About properties of the average functional and of the continuous  
infimal convolution in stochastic convex analysis*

Proceedings of the 7th IFIP Conference, (1975)

Optimization techniques, Modeling and Optimization in the Service  
of Man. Lecture Notes in Computer Science 41, Springer-Verlag  
763-789 (1976)

*Conditions nécessaires d'optimalité en programmation non  
différentiable*

Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t. 283, Série A, 843-845 (1976)

Ch. V

*On optimality conditions in nondifferentiable programming*

Math. Programming (à paraître, Vol 14, 1978)

*Gradients généralisés de fonctions marginales*

Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t.283, Série A, 333-335 (1976)

et

Article dans SIAM J. on CONTROL and OPTIMIZATION (à paraître  
Vol. 16, n° 2, Mars 1978)

Ch. VI



*Conditions nécessaires d'optimalité pour un programme stochastique avec recours*

Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t. 283, Série A, 943-946 (1976)  
et

Article dans SIAM J. on CONTROL and OPTIMIZATION (à paraître  
Vol. 16, N° 2, Mars 1978)

Ch. VI

*Sur les cônes tangents et leurs applications en programmation non différentiable*

Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t. 284, Série A, 1381-1384 (1977)

*On the tangent cones with applications to nondifferentiable programming in Banach spaces*

Articles

- . soumis à : Math. of Operations Research
- . à paraître dans : Actes du Colloque d'Analyse non convexe (Pau, Mai 1977)

Ch. VII

et

Ch. VIII

*Gradients généralisés de fonctions composées. Applications*

Note aux C.R. Acad. Sc. Paris (Octobre 1977)





